FISICA CUANTICA II
CONTROL DE MAYO, CUESTIONES

CURSO 2023/2024 16 de Mayo de 2024

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado.
Esta prueba cuenta un 25% de la nota del control final.

1[3].- Sea O un operador hermitico en un espacio de Hilbert de dimension 2 que tiene dos autovalores distintos $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 3$. En la base ortogonal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ el autovector correspondiente al autovalor λ_1 es:

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Obtengase la expresion de matricial de O en la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

2[3].- Un sistema de dos niveles tiene por hamiltoniano:

$$H = \hbar \left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \right) ,$$

siendo $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ una base ortonormal de estados del espacio de Hilbert. En el instante inicial $t = 0$ el vector de estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle .$$

Sea $|\psi(t)\rangle$ el vector de estado del sistema en el instante de tiempo $t \geq 0$. ¿Para que valores de t el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ es ortogonal al vector de estado inicial $|\psi(0)\rangle$?.

3[2].- Considerese un oscilador armonico unidimensional y sean $|n\rangle$ los autoestados de su hamiltoniano. Obtenganse el resultado de actuar con el operador:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|$$

sobre el estado:

$$|\phi\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\phi} |n\rangle ,$$

siendo C una constante de normalizacion y ϕ un numero real positivo.

4[2].- Una particula que se mueve a lo largo del eje x se encuentra en un estado $|\psi\rangle$, en el que el valor medio del operador posicion X es:

$$\langle X \rangle_\psi = q .$$

Sea P el operador momento de la particula. Obtengase el valor medio del operador X en el estado $|\phi\rangle$ dado por:

$$|\phi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} P} |\psi\rangle .$$

FISICA CUANTICA II

CONTROL DE MAYO, PROBLEMAS

CURSO 2023/2024 16 de Mayo de 2023

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado. Este examen cuenta un 75% de la nota.

1[3].- Un sistema esta formado por una particula de espin 1/2 y un oscilador armonico unidimensional. Su vector de estado es:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |\alpha\rangle + i|-\rangle \otimes |\beta\rangle\right) ,$$

siendo $|\pm\rangle$ los estados de la particula de espin 1/2 tales que $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ y $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ los siguientes vectores de estado del oscilador:

$$|\alpha\rangle = \sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}|n\rangle , \qquad |\beta\rangle = 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}|n\rangle .$$

a) Efectuese la traza parcial sobre el espacio de Hilbert del oscilador armonico y obtengase la matriz densidad reducida para la particula de espin 1/2.

b) Obtengase la pureza y el vector de Bloch de la matriz densidad obtenida en el apartado anterior.

2[4]. Dos particulas de espin 1/2 interaccionan a traves del hamiltoniano:

$$H = \hbar g\, \sigma_z \otimes \sigma_x ,$$

siendo g una constante real. En el instante inicial $t = 0$ el estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+,+\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-,-\rangle ,$$

donde $|s, s'\rangle = |s\rangle \otimes |s'\rangle$ para $s, s' = \pm$ y $\sigma_z|s\rangle = s|s\rangle$. Transcurrido un tiempo $t > 0$ se mide σ_z sobre el primer espin y se obtiene el valor $+1$.

a) Si inmediatamente despues de esta primera medida se mide σ_x para el segundo espin, ¿Que valores se pueden obtener y con que probabilidades?.

b) Supongase que inmediatamente despues de medir σ_z en el primer espin en el instante de tiempo $t > 0$ y obtener $+1$ como resultado se mide σ_z en el segundo espin. ¿Cual sera el valor medio de los resultados obtenidos?. ¿Para que valores de $t > 0$ este valor medio es maximo?.

3[3].- Una particula de espin 2 tiene por hamiltoniano:

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\, S_+ S_- ,$$

siendo ω una constante y $S_\pm = S_1 \pm iS_2$ los operadores escalera del algebra del momento angular de espin de la particula. Obtenganse los niveles de energia del sistema y sus degeneraciones.